Algorithmes avec signatures pour le calcul de bases de Gröbner sur les algèbres de Tate

Xavier Caruso   Tristan Vaccon   Thibaut Verron

January 21, 2020

Depuis leur introduction par Buchberger [Buc65] en 1965, les bases de Gröbner sont devenues un outil fondamental en calcul formel, permettant de répondre à de nombreuses questions sur les idéaux d'algèbres de polynômes multivariés.

Dans cet exposé, nous présentons des algorithmes permettant de calculer des bases de Gröbner sur des algèbres de Tate, dont les objets sont des séries formelles multivariées, à coefficients dans un anneau ou corps valué complet, par exemple les entiers ou nombres p-adiques, avec une condition de convergence sur les coefficients. Les algèbres de Tate sont au centre de la géométrie rigide [Tat71, BGR84], dont l'objectif est de développer une "géométrie analytique p-adique", qui fournirait à la géométrie algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ les mêmes outils que la correspondance géométrie analytique - géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$.

Une définition des bases de Gröbner pour les algèbres de Tate, ainsi que deux algorithmes pour les calculer, adaptés de l'algorithme de Buchberger [Buc76] et de l'algorithme F4 [Fau99], ont été présentés à ISSAC en 2019 [CVV19].

Plus encore que dans le cas des algèbres de polynômes, le calcul de réductions à zéro dans ces algorithmes est extrêmement coûteux: il s'agit de chaînes infinies de réductions, qui terminent uniquement parce que l'on travaille à précision finie. Dans le cadre de polynômes, de nombreux algorithmes ont été développés pour identifier et éviter les réductions à zéro [Fau02, EF17], et dans cet exposé, nous présentons une adaptation de ces idées au cas des algèbres de Tate.

Une difficulté inhérente à la situation est que l'ordre utilisé pour les termes dans les algèbres de Tate est un ordre dit *mixte*, où il peut arriver que $t_1 t_2 < t_1$ pour des termes t_1 et t_2. Nos algorithmes font appel aux idées utilisées pour calculer des bases de Gröbner avec signatures dans le cas d'anneaux locaux [LWXZ18].

References

[BGR84] Bosch Siegfried, Günzter Ulrich and Remmert Reinhold, Non-Archimedean analysis, Springer-Verlag (1984)

[Buc65] B. Buchberger. *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal.* PhD thesis, University of Innsbruck, Austria, 1965.

[Buc76] Bruno Buchberger. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *ACM SIGSAM Bulletin*, 10(3):19–29, 1976.

[CVV19] Xavier Caruso, Tristan Vaccon, and Thibaut Verron. Gröbner bases over Tate algebras. *ISSAC'19*, 2019.

[EF17] C. Eder and Jean-Charles Faugère. A Survey on Signature-based Algorithms for Computing Gröbner Bases. *Journal of Symbolic Computation*, 80:719–784, 2017.

[Fau99] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4). *Journal of Pure and Applied Algebra*, 139(1-3):61–88, 1999. Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998).

[Fau02] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5). In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 75–83 (electronic). ACM, 2002.

[LWXZ18] Dong Lu, Dingkang Wang, Fanghui Xiao, and Jie Zhou. Extending the GVW algorithm to local ring. In *Proceedings of the 2018 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC '18*, pages 271–278, New York, New York, USA, 2018. ACM Press.

[Tat71] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12(4):257–289, December 1971.