

Méthodes algébriques pour le contrôle de spins en Imagerie à Résonance Magnétique

Thibaut Verron

Bernard Bonnard, Olivier Cots, Jean-Charles Faugère,
Alain Jacquemard, Jérémy Rouot, Mohab Safey El Din

Mots-clefs : Contrôle optimal, équation de Bloch, Imagerie à Résonance Magnétique, Méthodes algébriques

L'imagerie à résonance magnétique nucléaire (IRMN ou IRM) est un procédé d'imagerie médicale reposant sur la mesure des réactions des substances biologiques à l'application d'un champ magnétique. Cette réponse est modélisée par les équations de Bloch, qui peuvent s'écrire comme un système de 4 équations différentielles en 4 variables d'état et contrôlées par une fonction u . Ces équations font intervenir des paramètres dépendant du système considéré (position et nature des spins). Steffen Glaser et son équipe ont montré [3] que la théorie du contrôle optimal permet de contrôler un spin plus efficacement que les heuristiques généralement utilisées.

L'étude des invariants du système dynamique se ramène à des calculs de nature algébrique, à savoir l'étude de systèmes d'équations polynomiales en les variables d'état et les paramètres du système. Les auteurs de [1] ont montré, sur 4 systèmes expérimentaux, que l'étude de ces systèmes algébriques permet de distinguer les paramètres expérimentaux. Ces calculs utilisaient des bases de Gröbner, dans une situation où les paramètres étaient fixés. Il est possible de poursuivre les mêmes calculs sans spécialiser les paramètres, et d'obtenir ainsi des résultats de classification des paramètres en fonction de propriétés algébriques. Dans [2], les auteurs ont montré comment le calcul de la classification des racines réelles d'un des invariants du système peut être mené en toute généralité sans spécialiser les paramètres.

Ce calcul peut se faire en tirant parti de la structure du système considéré. Par exemple, l'un des invariants est donné par l'ensemble des points singuliers du lieu d'annulation du déterminant d'une matrice. Les points singuliers d'un tel objet s'interprètent géométriquement en fonction du rang de la matrice sous-jacente, et cela permet de mener les calculs de manière plus efficace, en stratifiant les calculs suivant le rang de la matrice. Ces techniques s'étendent à d'autres invariants, par exemple définis en termes de lieu d'annulation d'un produit matrice-vecteur, même sans condition de rang sur la matrice.

L'exposé sera complété par quelques exemples de résultats que l'on a pu obtenir pour le contrôle des équations de Bloch en IRM.

Références

- [1] Bernard Bonnard, Monique Chyba, Alain Jacquemard, and John Marriott. Algebraic geometric classification of the singular flow in the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. *Mathematical Control and Related Fields*, 3(4):397–432, 2013.
- [2] Bernard Bonnard, Jean-Charles Faugère, Alain Jacquemard, Mohab Safey El Din, and Thibaut Verron. Determinantal sets, singularities and application to optimal control in medical imagery. In *Proceedings of the 2016 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '16, 2016.
- [3] Marc Lapert, Yun Zhang, Martin A. Janich, Steffen J. Glaser, and Dominique Sugny. Exploring the physical limits of saturation contrast in magnetic resonance imaging. *Scientific Reports*, 2(589), 2012.