Complexité du calcul de bases de Gröbner pour des systèmes homogènes avec poids

J.-C. Faugère, M. Safey El Din, **T. Verron**
Équipe PolSys, LIP6, UPMC Sorbonne Universités, INRIA, CNRS
`jean-charles.faugere@inria.fr`,
`mohab.safey@lip6.fr`,`thibaut.verron@lip6.fr`

La résolution de systèmes polynomiaux est un problème important aux applications multiples, et nous nous intéressons ici à sa résolution via le calcul de bases de Gröbner, introduites par Buchberger [1]. Une stratégie de calcul de bases de Gröbner (dite stratégie normale) consiste à réduire des paires de polynômes, en commençant par les paires de plus bas degré. Génériquement, en arrêtant le calcul à un degré d, on obtiendra l'ensemble des polynômes de degré inférieur à d dans la base, et on dispose de bornes de complexité pour estimer *a priori* la difficulté du calcul. En revanche, pour des systèmes structurés provenant d'applications, il arrive que l'on observe des chutes de degré. Ce comportement complique significativement l'obtention de bornes de complexité reflétant la stratégie de calcul.

Ces chutes de degré sont corrélées à la non-régularité des composantes homogènes de plus haut degré du système, c'est-à-dire que le critère F_5 ne permet pas d'éliminer toutes les réductions à zéro entre ces composantes. On peut par conséquent chercher à "modifier" ces composantes homogènes de plus haut degré, de manière à ce qu'elles forment une suite régulière, et qu'ainsi les calculs soient plus prédictibles et plus rapides.

Dans cet exposé, nous étudions une possibilité pour ainsi régulariser le calcul de bases de Gröbner, qui consiste à élargir la définition du degré en affectant des poids arbitraires aux variables. Plus précisément, on s'intéresse à la résolution de systèmes homogènes avec poids (ou quasi-homogènes, [6]), ce qui généralise la notion d'homogénéité. Étant donné un système de poids $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$, on définit le degré pondéré d'un monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ comme la somme pondérée de ses degrés en chaque variable : $\deg_W(X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$. Les polynômes homogènes avec poids sont alors les polynômes constitués uniquement de monômes du même degré pondéré. Hors cas triviaux, un calcul de base de Gröbner pour un système homogène avec poids avec la stratégie normale sans poids aura généralement un comportement irrégulier, avec des chutes de degré.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes homogènes avec poids, de degrés pondérés $(d_1, \ldots, d_m)$. Les polynômes $f_i(X_1^{w_1}, \ldots, X_n^{w_n})$ sont homogènes, de degrés totaux respectifs $(d_1, \ldots, d_m)$. On peut alors utiliser les algorithmes usuels (Buchberger, F_4 [2], F_5 [3]) pour les systèmes homogènes, et expérimentalement, la stratégie normale redevient régulière génériquement. L'enjeu est alors de justifier ce comportement par la théorie.

Si l'on considère des idéaux zéro-dimensionnels définis par une suite régulière ($m = n$), le nombre de solutions du systèmes est borné par la borne de Bézout, et nous avions proposé ([5]) une borne sur le degré à atteindre dans les réductions de polynômes (borne de Macaulay : $d_{\text{reg}} \leq \sum_{i=1}^{n}(d_i - w_i) + \max\{w_j\}$), montrant qu'on peut résoudre un tel système en temps polynomial en le nombre de solutions.

Pour la dimension positive ($m < n$), on généralise la borne de Macaulay pondérée pour les systèmes génériques : $d_{\text{reg}} \leq \sum_{i=1}^{m}(d_i - w_i) + w_m$. Cette borne améliore la précédente pour les systèmes de dimension zéro, et indique qu'il semble plus efficace de choisir les variables de poids les plus faibles comme les plus petites (phénomène confirmé en pratique). Pour les systèmes surdéterminés ($m > n$), sous une hypothèse supplémentaire sur W, on montre que la semi-régularité est caractérisée par la série de Hilbert de l'idéal. Ceci permet de calculer *a priori* le degré de régularité d'un système semi-régulier.

Des expériences menées à la fois avec des systèmes génériques et issus d'applications confirment que prendre en compte la structure homogène avec poids d'un système permet d'accélérer significativement les calculs.

Bibliographie

[1] B. Buchberger. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *ACM SIGSAM Bull.*, 10(3) :19–29, 1976.

[2] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4). *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3) :61–88, 1999. Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998).

[3] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5). In ISSAC '02, pages 75–83 (electronic), New York, 2002. ACM.

[4] J.-C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, and T. Mora. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering. *J. Symbolic Comput.*, 16(4) :329–344, 1993.

[5] J.-C. Faugère, M. Safey El Din, and T. Verron. On the complexity of computing Gröbner bases for quasi-homogeneous systems. In ISSAC '13, New York, 2013. ACM.

[6] C. Traverso. Hilbert functions and the Buchberger algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 22(4) :355 – 376, 1996.